

Диофантовы уравнения

1. Решите уравнение $5xy - 3x + 4y = 2$ в целых числах x, y .
2. В клетчатом прямоугольнике размера $m \times k$ провели диагональ. Сколько клеток она пересекла?
3. Числа a и b взаимно просты. Докажите, что для каждого натурального числа c существует ровно одна пара (x, y) целых чисел такая, что $0 \leq x \leq b - 1$ и $ax + by = c$.
4. Докажите, что число для любых взаимно простых натуральных чисел a и b число $c = ab - a - b$ является наибольшим, для которого уравнение $ax + by = c$ не имеет решений в целых неотрицательных x, y .
5. На числовой прямой красным цветом отметили все точки вида $81x + 100y$, где x и y – натуральные числа. Остальные целочисленные точки отметили синим цветом. Докажите, что на прямой есть точка такая, что любые симметричные относительно неё целочисленные точки отмечены разным цветом.
6. Докажите, что уравнения $x^2 - 2y^2 = 3$ и $5x^2 - 7 = 11y$ не имеют решений в целых числах.
7. Докажите, что все примитивные пифагоровы тройки имеют вид $(m^2 - k^2, 2mk, m^2 + k^2)$, где $m > k$ – натуральные взаимно простые числа разной чётности.
8. Докажите, что для любых целых чисел a и b уравнение $x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2$ имеет решение в целых числах.
9. Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 + z^3 = 2$ имеет бесконечно много решений в целых числах.
10. Решите уравнение $x^2 + x = y^3 + y^2 + y$ в целых числах.
11. Докажите, что уравнение $x^3 - 5 = y^2$ не имеет решений в целых числах.
12. Докажите, что уравнение $x^7 + 7 = y^2$ не имеет решений в целых числах.